Fokker-Planck equation and density of states in disordered quantum wires

— 乱れた量子細線の状態密度に対するフォッカー・プランク方程式 —

京都大学 基礎物理学研究所、理化学研究所　古崎 昭 [1]

ランダムなポテンシャル中を運動する電子のエネルギー準位や波動関数の統計的な性質は、その系のハミルトニアンのもつ対称性と系の次元によって決まることはよく知られている。例えば、0次元系（量子ドットなど）のエネルギー準位統計は、ランダム行列理論により、通常の3種類のユニバーサリティー・クラス（orthogonal, unitary, symplectic）に加えて、ランダム・ホッピング模型などに対する3種のカイラルなクラス（chiral orthogonal, chiral unitary, chiral symplectic）と超伝導系の準粒子に対する4種のクラス（C, CI, D, DIII）[1] に分類される。

クラス	時間反転	スピン回転	m_o	m_l	d	$\mathcal{M}$	$\mathcal{H}$	
	yes	yes	1	1	2	CI	AI	orthogonal
Standard	no	yes(no)	2	1	2(1)	AIII	A	unitary
	yes	no	4	1	2	DIII	AII	symplectic
	yes	yes	1	0	2	AI	BDI	chiral orthogonal
Chiral	no	yes(no)	2	0	2(1)	A	AIII	chiral unitary
	yes	no	4	0	2	AII	CII	chiral symplectic
	yes	yes	2	2	4	C	CI	
BdG	no	yes	4	3	4	CII	C	
	yes	no	2	0	2	D	DIII	
	no	no	1	0	1	BDI	D	

表 1: ユニバーサリティー・クラスの分類。転送行列 $\mathcal{M}$ やハミルトニアン $\mathcal{H}$ のなす群は、Cartan による記号にならった [1]。m_o, m_l はルートの多重度のパラメータで、d は固有値の縮重度をあらわす。

量子細線などの準1次元系に関しては、表1の (3+3+4) 種のユニバーサリティークラスのそれぞれについて、量子細線の長さを時間と見なした Fokker-Planck 方程式の形で電

[1] E-mail: furusaki@riken.go.jp

子波の転送行列の固有値に対するscaling方程式が得られている。特に、通常の3種類のクラスに対するものはDorokhov-Mello-Pereyra-Kumar方程式[2]としてよく知られているが、他の7種に対する方程式は最近になって導かれた[3,4]。

このFokker-Planck方程式を利用して、準1次元系のエネルギー状態密度に対するscaling方程式を上記10種のクラスに対して導き、熱力学極限（量子細線の長さが無限大）での状態密度に対する解析的な表式を得ることができる[5]。その結果によると、状態密度$\nu(\varepsilon)$は、

$$\nu(\varepsilon) = -\frac{d}{\pi v_F}\mathrm{Re}\frac{\partial}{\partial a}a\frac{\partial}{\partial a}\ln Z(a)\bigg|_{a\to -i\gamma l\varepsilon/v_F} \tag{1}$$

$$Z(a) = \int dx_1\cdots dx_N|J(\{x_j\})|\exp\left(-a\sum_{j=1}^{N}\cosh 2x_j\right) \tag{2}$$

で与えられる。上の式において、Nは細線の伝導channel数であり、$J(\{x_j\})$とγは、standardとBdGのクラスでは

$$J = \prod_{j=1}^{N}\sinh^{m_l}(2x_j)\prod_{k<j}\prod_{\pm}\sinh^{m_o}(x_j\pm x_k), \qquad \gamma = m_o(N-1)+m_l+1, \qquad 0<x_j<\infty \tag{3}$$

で与えられ、chiralクラスでは

$$J = \prod_{j=1}^{N}\prod_{k<j}\sinh^{m_o}(x_j-x_k), \qquad \gamma = \frac{1}{2}[m_o(N-1)+2], \qquad -\infty<x_j<\infty \tag{4}$$

である。chiralやBdGの7種のクラスでは、状態密度$\nu(\varepsilon)$はエネルギーに依存し、いくつかの場合にはエネルギーバンド中央（あるいはフェルミ面, $\varepsilon=0$）で状態密度が特異性をもつ。詳細は文献[5]を参照されたい。

この研究は、Piet Brouwer, Christopher Mudry, Misha Titovの3氏との共同研究である。

参考文献

[1] A. Altland and M.R. Zirnbauer, Phys. Rev. B **55** (1997), 1142.

[2] C.W.J. Beenakker, Rev. Mod. Phys. **69** (1997), 731.

[3] P.W. Brouwer, C. Mudry, B.D. Simons and A. Altland, Phys. Rev. Lett. **81** (1998), 862.

[4] P.W. Brouwer, A. Furusaki, I. Gruzberg and C. Mudry, Phys. Rev. Lett. **85** (2000), 1064.

[5] M. Titov, P.W. Brouwer, A. Furusaki and C. Mudry, Phys. Rev. B **63** (2001), 235318.